Dodatna nastava iz matematike

Grafovi

Predavač: A.Pejčev

1. Dat je graf u kom je svaki čvor stepena barem 3. Dokazati da on sadrži zatvorenu konturu parne dužine.

2. Dato je $n$ tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i svaka duž njima odredjena je obojena u crveno ili plavo. Dokazati da je date tačke moguće označiti sa $B_1 B_2, \ldots, B_n$ tako da za neko $1 \leq i \leq n-1$ važi jedan od sledeća dva uslova:

   (a) duži $B_1 B_2, \ldots, B_i B_{i+1}$ plave, a duži $B_{i+1} B_{i+2}, \ldots, B_n B_1$ crvene;

   (b) sve duži pomenute pod a) su iste boje.

3. U svakoj od 3 škole ima po $n$ učenika i svaki učenik iz svake škole poznaje bar $n+1$ učenika iz preostale dve. Dokazati da postoje tri učenika, svaki iz po jedne škole, koji se medjusobno poznaju.

4. Ako graf sa $n$ čvorova ima barem $n$ grana, onda on sadrži ciklus. Dokazati.

5. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ različiti podskupovi skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dokazati da postoji $x \in S$ tako da su skupovi $A_1 \backslash \{x\}, A_2 \backslash \{x\}, \ldots, A_n \backslash \{x\}$ takodje različiti.

6. U grafu od $n$ temena za svaka dva temena koja nisu spojena važi da su u zbiru spojena sa barem $n$ temena. Dokazati i upamtiti kao lemu da onda u tom grafu postoji put koji prolazi kroz svako teme grafa tačno jednom (Hamiltonov put).

7. Uskupu od $2n$ ljudi svako ima barem $n$ poznanika. Dokazati da ih je moguće smestiti u $n$ dvokrevetnih soba tako da je svako u sobi sa svojim poznanikom.

8. Pretpostavimo da se u nekom društvu od $n$ osoba svake dve osobe ili vole ili ne vole i da ima $q$ parova koji se vole ($q \in N$). Ako u svakom društvu od 3 osobe postoje dve koje se ne vole, dokazati da postoji bar jedan član društva takav da medju onima sa kojima se ne voli ima najviše $q(1 - \frac{4q}{n^2})$ parova koji se vole. Pretpostavomo i to da je "voljenje" simetrična relacija.

9. Gradove $P_1, P_2, \ldots, P_{1983}$ povezuje 10 aviokompanija. Postoji direktna veza izmedju bilo koja dva grada (bez presedanja) i sve veze su dvosmerne. Dokazati da bar jedna aviokompanija može da ponudi kružno putovanje sa neparnim brojem sletanja.

10. Neka je $A$ skup od $n$ tačaka u prostoru. Iz familije svih segmenata sa krajevima u $A$, $q$ segmenata je izabrano i obojeno u žuto. Pretpostavimo da svi žuti segmenti imaju različite dužine. Da se dokaže da postoji poligonalna linija sastavljena od $m$ različitih žutih segmenata, poredjanih u rastući poredak po dužini, tako da važi $m \geq \frac{2q}{n}$.

11. U jednoj grupi za svakih $n$ ljudi postoji tačno jedna osoba koja ih sve poznaje (poznanstva su uzajamna i niko nije poznanik sa samim sobom). Ako je $X$ osoba sa najviše poznanika ,koliko poznanika ima $X$?

12. Na fudbalskom turniru na kojem učestvuje 18 ekipa odigrano je 8 kola. Dokazati da se mogu naći tri ekipe tako da se nikoje dve nisu srele u odigranim kolima.

13. Na šahovskom turniru svaki igrač je sa svakim odigrao po jednu partiju. Za pobedu se dobijao 1, za remi $\frac{1}{2}$ i za poraz 0 poena. Na kraju se ispostavilo da je svaki igrač polovinu svih osvojenih poena sakupio u partijma sa 10 poslednje plasiranih igrača, Koliko je ljudi učestvovalo na turniru?

14. U senatu ima 30 senatora. Svaki je prijatelj sa tačno 6 drugih. Na koliko se načina može formirati tročlana komisija u kojoj su svi prijatelji ili svi neprijatelji?

15. Skup $M$, koji se sastoji od $n$ ljudi ima sledeće osobine:
    (a) svaka osoba iz $M$ poznaje tačno $k$ ljudi iz $M$;
    (b) svake dve osobe iz $M$ koje se medjusobno poznaju imaju tačno $l$ zajedničkih poznanika u $M$;
    (c) svake dve osobe iz $M$ koje se medjusobno ne poznaju imaju tačno $m$ zajedničkih poznanika u $M$.

    Dokazati jednakost
    $$m(n-k) - k(k-l) + k - m = 0$$
    .
    Podrazumeva se da je poznanstvo simetrična relacija.

16. Sve stranice i dijagonale konveksnog šestougla obojene su crveno ili plavo. Dokazati da postoje bar dva jednobojna trougla.
    **Definicija**: Orijentisan prost graf bez petlji se zove **turnir** ako za svaka dva njegova čvora tačno jedan od njih tuče onaj drugi (oznaka $x \to y$). Turnir je **jako povezan** ako za svaka dva čvora x i y, ako x tuče y, postoji prost orijrntisan put od $y$ do $x$. Čvor a je **king** turnira ako za sve $b \neq a$ važi $a \to b$ ili postoji $c$ tako da $a \to c \to b$.

17. Turnir je jako povezan akko ima Hamiltonovu konturu. Dokazati.

18. Turnir ima barem jednog kinga i ne može ih imati tačno dva. Dokazati.

19. Dokazati da su jedini parovi prirodnih brojeva (n,k) $n \geq k$ za koje ne postoji turnir sa n čvorova i k kingova $(4,4), (n,0), (n,2)$.